1. Ejercicios. 2ª parte

Ejercicio 1 *Calcule*

1. $P(\chi^2_9 \leq 3'33)$
2. $P(\chi^2_{15} \geq 7'26)$.
3. $P(15'51 \leq \chi^2_8 \leq 22)$.
4. $P(\chi^2_{70} \leq 82)$.

Ejercicio 2 *Si* $X \sim \chi^2_{26}$, *obtenga un intervalo* $[a, b]$ *que contenga un* $95\,\%$ *de probabilidad y que deje la probabilidad restante igualmente repartida a derecha e izquierda.*

Ejercicio 3 *Calcule*

1. $P(t_5 < -0'92)$.
2. $P(2'045 < t_{29} < 2'756)$.

Ejercicio 4 *Calcule el valor* t *que cumple:*

1. $P(t_{12} < t) = 0'95$.
2. $P(|t_8| > t) = 0'01$.

Ejercicio 5 *Calcule el valor* c *tal que*

1. $P(\chi^2_{18} < c) = 0'99$.
2. $P(\chi^2_{24} > c) = 0'05$.
3. $P(F < c) = 0'99$, *para la* F *de Snedecor con* $n_1 = 10, n_2 = 16$.
4. $P(F > c) = 0'05$, *para la* F *de Snedecor con* $n_1 = 16, n_2 = 10$.

Ejercicio 6 *En una población normal* $N(6, 1'2)$ *se toma una muestra aleatoria de tamaño* 16. *Determine la probabilidad de que la media muestral sea inferior a* $6'06$ *y la probabilidad de que la varianza muestral sea inferior a* $0'3$.

Ejercicio 7 *Si una variable aleatoria, X, sigue una distribución t de Student con n grados de libertad, y n es grande (digamos $n \geq 30$), entonces se puede aproximar X por una $N(0,1)$.*

Utilice esta idea para calcular $P(t_{350} < 0'83)$.

Ejercicio 8 *En una población X normal $N(5,3)$ se toma una muestra aleatoria de tamaño 25. Calcule la probabilidad de que*

1. *X se desvíe de su valor esperado en más de una décima.*
2. *la suma de los valores muestrales esté entre 120 y 130.*
3. *la media muestral se desvíe de su esperanza en más de una décima.*
4. *la varianza muestral sea menor que $10'15$.*

Ejercicio 9 *El tiempo de vida de unos organismos tiene un valor medio de 75 días y una varianza de 18. Tomamos una muestra de 64 organismos. Calcule la probabilidad de que la vida media de la muestra pertenezca al intervalo $(73'5, 76'5)$.*

Ejercicio 10 *De una población distribuida normalmente, se toman dos muestras: una de 41 individuos y otra de 25. Calcule la probabilidad de que la varianza de la primera muestra sea por lo menos el doble que la de la segunda. Calcule también la de que sea como mucho el triple.*

Ejercicio 11 *Sea X una población con $EX] = \mu$, $V[X] = \sigma^2$. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de esa población, y sean $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ la media muestral, $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$, $\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$.*

1. *Demuestre que $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \bar{X}^2$.*
2. *Calcule $E[S^2]$. (Sugerencias: recuerde que $E[X^2] = V[X] + E[X]^2$, y que la esperanza y la varianza de $\bar{X}$ las conoce).*
3. *Discuta si S^2 y $\hat{S}^2$ son estimadores centrados o sesgados para σ^2.*

Ejercicio 12 *El número de consultas por error a un servicio de atención en una hora sigue una distribución de Poisson de parámetro desconocido. Para estimarlo, se hacen quince observaciones de una hora cada una (repartidas al azar y de forma independiente). El número observado de consultas por error en esas quince observaciones viene dado por:*

$$1, 1, 3, 2, 5, 3, 1, 2, 3, 0, 1, 4, 2, 3, 2$$

Estime el parámetro desconocido por el método de máxima verosimilitud.

Ejercicio 13 *El tiempo de permanencia a partir de mediodía de 12 coches escogidos al azar en un aparcamiento es el siguiente (medido en minutos):*

$$13, 22, 43, 5, 7, 52, 36, 68, 15, 34, 25, 17$$

Sabemos que la duración de la estancia sigue una distribución exponencial. Estime por el método de máxima verosimilitud el parámetro λ.

Ejercicio 14 *Los gastos diarios de una empresa (en miles de euros) constituyen una variable aleatoria con la siguiente función de densidad*

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x}{a}} & x > 0 \end{cases} \qquad a > 0.$$

Se toma una muestra aleatoria simple de 6 *días en los que el gasto medio fue:*

$$62'7 \quad 75'5 \quad 52'8 \quad 61'1 \quad 63'3 \quad 57'6$$

Obtenga una estimación de máxima verosimilitud del parámetro a y establezca si el estimador es centrado.

Ejercicio 15 *Dada una población definida por una variable aleatoria continua con función de densidad*

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{4x}{a^2} e^{\frac{-2x}{a}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Obtenga un estimador del parámetro a por el método de los momentos y por el método de máxima verosimilitud .

¿Son centrados los estimadores obtenidos? ¿Son consistentes?

Ejercicio 16 *La duración en días de los viajes turísticos por Italia es una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a* 3*. Se tomó una muestra aleatoria de nueve de esos viajes, y se observaron los siguientes tiempos:*

$$x_1 = 10 \;\; x_2 = 6 \;\; x_3 = 5 \;\; x_4 = 9 \;\; x_5 = 6 \;\; x_6 = 6$$
$$x_7 = 7 \;\; x_8 = 8 \;\; x_9 = 5$$

Se pide:

1. *Estimar la duración media del viaje por máxima verosimilitud.*
2. *Calcular la probabilidad de que la diferencia, en valor absoluto, entre la estimación media estimada y la real sea menor que un día.*

Ejercicio 17 *Dada una muestra aleatoria de tamaño n de una población, calcule el estimador de máxima verosimilitud para los parámetros indicados en los casos siguientes:*

1. *p, en una distribución de Bernoulli*
2. *λ, en una de Poisson*
3. *λ, en una exponencial*
4. *la esperanza, μ, en una normal $N(\mu, 1)$*
5. *la desviación típica, σ, en una normal $N(5, \sigma)$*

Ejercicio 18 *El tiempo que dedica cada familia a la compra semanal es una variable aleatoria que sigue una distribución normal. Se escogen* 100 *familias al azar, se mide el tiempo que emplean (en horas), t_k, y se observa que:*

$$\sum t_k = 312'4 \qquad\qquad \sum t_k^2 = 1150$$

Obtenga el intervalo de confianza para la media de la población, con niveles de confianza del 90 % *y del* 95 %*.*

Ejercicio 19 *El número de electrodomésticos que vende una tienda en un mes sigue una distribución normal. A lo largo de* 17 *meses se ha observado que la media era de* 85 *artículos vendidos, con una varianza de* 100 *artículos*^{2}*. Obtenga un intervalo de confianza al* 95 % *para la esperanza poblacional del número mensual de electrodomésticos vendidos por la tienda.*

Ejercicio 20 *Un estudio consistente en entrevistar a* 2000 *personas para conocer sus intenciones de viaje en este año reveló que el* 700 *planean salir al extranjero. Suponiendo que las respuestas son veraces, ¿cuál será el intervalo de confianza al* 99 % *para el porcentaje de personas que saldrán de España en este año?*

Ejercicio 21 *¿Qué tamaño mínimo ha de tener una muestra para estimar la estatura media de cierta población con un intervalo al* 90 % *de confianza y un error de estimación de* $\pm 0'2$ *cm, si la varianza poblacional es de* $3cm^2$*?*

Ejercicio 22 *Calcule un intervalo de confianza al nivel* $1 - \alpha = 0,999$ *para la densidad de la Tierra, a partir de los resultados obtenidos por Cavendish:*

$5'50$; $5'57$; $5'42$; $5'61$; $5'53$; $5'47$; $4'88$; $5'62$; $5'63$; $5'07$; $5'29$; $5'34$;

5'26; 5'44; 5'46; 5'55; 5'34; 5'30; 5'36; 5'79; 5'75; 5'29; 5'10; 5'68;

5'58; 5'27; 5'85; 5'65; 5'39

(Supóngase que la población es normal).

Ejercicio 23 *Hemos observado que entre* 100 *estudiantes había* 40 *de fuera de Madrid. Se pide:*

- *Obtener un intervalo de confianza al* 95 % *para la proporción de forasteros entre los estudiantes. Lo mismo si la muestra es de* 400 *estudiantes.*
- *Estudiar si dicha proporción puede considerarse igual a la proporción de forasteros en la población en general si ésta es de un* 33 %.
- *Repetir el estudio con niveles de confianza del* 90 % *y del* 98 %.
- *Interpretar los resultados.*

Ejercicio 24 *Para estimar el tiempo de fraguado de cierto tipo de hormigón se realizan* 16 *mediciones, con los siguientes resultados:*

82; 75; 78; 76; 78; 75; 79; 77; 76; 73; 77; 72; 77; 75; 73; 71

Halle intervalos de confianza para la esperanza y para la desviación típica al 95 *y al* 99 %.

Ejercicio 25 *En el departamento de control de calidad de una empresa, se quiere determinar si ha habido un descenso significativo de la calidad de su producto entre las producciones de dos semanas consecutivas a consecuencia de un incidente ocurrido durante el fin de semana. Deciden tomar una muestra de la producción de cada semana. Si la calidad de cada artículo se mide en una escala de 100, obtienen los siguientes resultados:*

Semana 1	*93*	*86*	*90*	*90*	*94*	*91*	*92*	*94*
Semana 2	*93*	*87*	*97*	*90*	*88*	*87*	*84*	*93*

Suponiendo que las varianzas en las dos producciones son iguales, construya un intervalo de confianza para la diferencia de las medias al nivel de $95\,\%$*. Interprete los resultados.*

Ejercicio 26 *Con el fin de comparar el promedio de faltas de ortografía cometidas en una composición por dos clases similares de alumnos, se tomaron dos muestras de 7 y 8 alumnos respectivamente, y se observaron los siguientes errores:*

Clase 1:	*10*	*10*	*12*	*12*	*13*	*13*	*14*	
Clase 2:	*8*	*9*	*10*	*10*	*10*	*10*	*12*	*12*

Suponiendo que el número de errores en ambas clases son normales, calcular el intervalo de confianza del $95\,\%$ *para la diferencia de las medias:*

1. *suponiendo que las varianza poblacionales son iguales y valen* $\sigma^2 = 1,44$*;*
2. *suponiendo que las varianzas poblacionales son iguales pero desconocidas*

Ejercicio 27 *Para conocer la duración (en meses) de unos dispositivos electrónicos, se examinan dos muestras de tamaños* 21 *y* 16 *y se obtienen estos resultados:* $\bar{x} = 20, S_X = 3'5$*,* $\bar{y} = 16, S_Y = 2'5$*. Se desea:*

- *Conocer un intervalo de confianza para el cociente de varianzas al nivel* $0'90$ *(también a los niveles* $0'80$ *y* $0'98$*)*
- *Hallar un intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales al nivel* $0'90$ *y al* $0'95$ *(suponiendo que las varianzas son iguales)*

Ejercicio 28 *La tensión que soportan unos cables de cierto tipo es una variable aleatoria normal de parámetros desconocidos. Para conocerlos, se toma una muestra aleatoria formada por cuatro cables a los que se somete a tensión hasta que se rompen. Las tensiones de rotura (en las unidades adecuadas) son:* $610, 540, 560$ *y* 580*. Se pide:*

- *Un intervalo de confianza a los niveles* $0'90$ *y* $0'95$ *para la tensión media de rotura.*
- *Un intervalo de confianza al nivel* $0'90$ *para la varianza.*

Ejercicio 29 *La vida media de los ordenadores de cierta clase, a tenor de los resultados obtenidos al observar una muestra de* 10 *máquinas, es de* 25 *meses, con una desviación típìca muestral de* $2'3$*. Al examinar* 12 *ordenadores de otra clase, se observa una vida media de* 28 *meses, con una desviación de* $2'1$*. Nos preguntamos:*

- *¿Podemos aceptar que las desviaciones típicas son iguales al nivel* $0'90$*? ¿Y a los niveles* $0'80$ *y* $0'98$*?*
- *Admitiendo que las varianzas son iguales, ¿podemos concluir que la duración media de los ordenadores del segundo tipo es mayor que la de los del primer tipo? (con niveles de significación* $0'05$ *y* $0'01$*)*

Ejercicio 30 *Se toma una muestra de tamaño* 17 *de una población normal, y la varianza muestral resulta ser* 9*. ¿Puede aceptarse al* $5\,\%$ *de significación que la varianza poblacional es 16? ¿Y si la muestra fuera de tamaño* 314*?*

Ejercicio 31 *Dados dos conjuntos de valores* X *e* Y *distribuidos normalmente se calculan sus varianzas muestrales:*
$s_X^2 = 6 \quad (n_X = 11)$, $s_Y^2 = 12 \quad (n_Y = 11)$

Determine:

1. *Si las varianzas muestrales difieren significativamente, esto es, si proceden o no de la misma distribución.*
2. *El tamaño muestral necesario (con* $n_X = n_Y$*) para que la diferencia entre* s_X^2 *y* s_Y^2 *sea estadísticamente significativa.*

Repita la discusión para $n_X = n_Y = 25$ *y para* $n_X = n_Y = 51$*.*

Ejercicio 32 *El número de espectadores de cierto programa semanal de televisión se aproxima por una normal. En una muestra aleatoria de* 10 *semanas se obtuvieron estos resultados (en millones de espectadores):*

$$7'25; 6'75; 6'25; 7'84; 7'32; 6'54; 6'36; 7'05; 6'85; 6'62$$

- *La dirección del programa asegura que la desviación típica es de un millón. Contraste esa afirmación con un nivel de significación del* $1\,\%$.
- *Con el mismo nivel, contraste la hipótesis de que la audiencia media es de al menos* 7 *millones (tenga en cuenta el resultado del apartado anterior)*

Ejercicio 33 *Una empresa está tratando de decidir la compra de una máquina que fabrica piezas entre dos modelos. Para ello, hace un experimento con cinco máquinas de cada uno de los tipos, obteniendo las siguientes muestras del número de piezas producidas durante una semana:*

Máquina 1*:* $39000, 39500, 40000, 40500, 41000$

Máquina 2*:* $39000, 41000, 42000, 43000, 44000$

Suponiendo que las producciones de ambas máquinas siguen distribuciones normales con la misma desviación típica, se pide:

- *Obtener un intervalo de confianza al* $90\,\%$ *para la diferencia de las medias poblacionales*
- *¿Hay evidencias estadísticas al* $90\,\%$ *para rechazar que las medias poblacionales son iguales?*

Ejercicio 34 *La concentración de sal en el océano Atlántico es una variable aleatoria que sigue una ley normal.*

Se toman 9 *muestras independientes, que dan una salinidad media de* 37 *g/l con una desviación típica de* $2,5$ *g/l. Calcule un intervalo de confianza para la varianza al* $90\,\%$.

En el océano Pacífico, se toman 11 *muestras independientes, que dan una salinidad media de* 35 *g/l con una desviación típica de* $1,5$ *g/l. Calcule el correspondiente intervalo de confianza para la varianza al* $90\,\%$.

¿Se puede aceptar que las varianzas son iguales, con un nivel de confianza del $90\,\%$*? ¿Y las medias?*

Ejercicio 35 *Una muestra de* 150 *frutales arroja una producción media de* 48*kg por árbol, con una desviación típica de* 6*. Una segunda muestra de*

200 *árboles, independiente de la primera, produce una media de* $53kg$ *por frutal, con una desviación típica de* 8. *Suponiendo que las producciones siguen distribuciones normales y que las varianzas muestrales coinciden con las poblacionales, contraste la hipótesis de que la segunda variedad supera al menos en* $6kg$ *por árbol el rendimiento medio de la primera variedad (al* 5 % *de significación).*

Ejercicio 36 *El coste por avería de ciertas reparaciones se distribuye según una normal. Nos dicen que la desviación típica es menor o igual a* 22 *euros. Una muestra aleatoria de tamaño* 16 *arroja una varianza muestral de* 500. *¿Es consistente con la afirmación anterior al* 5 % *de significación?*

Ejercicio 37 *La longitud en milímetros de unos tornillos sigue una ley normal. Una muestra aleatoria de* 10 *tornillos da estas medidas*

$$10, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 10, 8$$

- *Contraste con un nivel de significación del* 1 % *la hipótesis de que la longitud media es de* $11mm$.
- *Contraste la hipótesis de que la varianza poblacional es menor o igual que* 1, *al* 5 % *de significación*

Ejercicio 38 *Una granja de pollos afirma que el peso de sus animales tiene una desviación típica que no supera los* $200g$. *Una muestar de* 91 *aves da un resultado de* $S = 220$. *¿Es aceptable la afirmación de la granja al* 5 % *de significación? ¿Y al* 1 %*? ¿Y al* 10 %*?*

Ejercicio 39 *Se desea contrastar al* 5 % *de significación la hipótesis de que la media de trabajadores por explotación pecuaria de dos regiones es la misma. Para ello, se toman muestras de tamaños* 14 *y* 18 *respectivamente, que nos proporcionan estos datos:*

$$\sum_{j=1}^{14} x_j = 140, \qquad \sum_{j=1}^{14} (x_j - \bar{x})^2 = 490$$

$$\sum_{j=1}^{18} y_j = 198, \qquad \sum_{j=1}^{18} (y_j - \bar{y})^2 = 489$$

Suponiendo que ambas distribuciones son normales y tienen iguales varianzas, decida si la hipótesis se acepta o se rechaza.